Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane.

Par

G. PEANO à Turin.

Dans cette Note on détermine deux fonctions x et y, uniformes et continues d'une variable (réelle) t, qui, lorsque t varie dans l'intervalle $(0, 1)$, prennent toutes les couples de valeurs telles que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Si l'on appelle, suivant l'usage, *courbe continue* le lieu des points dont les coordonnées sont des fonctions continues d'une variable, on a ainsi un arc de courbe qui passe par tous les points d'un carré. Donc, étant donné un arc de courbe continue, sans faire d'autres hypothèses, il n'est pas toujours possible de le renfermer dans une aire arbitrairement petite.

Adoptons pour base de numération le nombre 3; appelons *chiffre* chacun des nombres 0, 1, 2; et considérons une suite illimitée de chiffres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que nous écrirons

$$T = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

(Pour ce moment, T est seulement une suite de chiffres).

Si a est un chiffre, désignons par $\mathbf{k}a$ le chiffre $2 - a$, *complementaire* de a; c'est-à-dire, posons

$$\mathbf{k}0 = 2, \quad \mathbf{k}1 = 1, \quad \mathbf{k}2 = 0.$$

Si $b = \mathbf{k}a$, on deduit $a = \mathbf{k}b$; on a aussi $\mathbf{k}a \equiv a$ (mod. 2).

Désignons par $\mathbf{k}^n a$ le résultat de l'operation $\mathbf{k}$ répétée n fois sur a. Si n est pair, on a $\mathbf{k}^n a = a$; si n est impair, $\mathbf{k}^n a = \mathbf{k}a$. Si $m \equiv n$ (mod. 2), on a $\mathbf{k}^m a = \mathbf{k}^n a$.

Faisons correspondre à la suite T les deux suites

$$X = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots, \quad Y = 0, c_1 c_2 c_3 \ldots,$$

où les chiffres b et c sont donnés par les rélations

$$b_1 = a_1, \; c_1 = \mathbf{k}^{a_1} a_2, \; b_2 = \mathbf{k}^{a_2} a_3, \quad c_2 = \mathbf{k}^{a_1 + a_3} a_4, \; b_3 = \mathbf{k}^{a_2 + a_4} a_5, \ldots$$

$$b_n = \mathbf{k}^{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad c_n = \mathbf{k}^{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} a_{2n}.$$

Donc b_n, $n^{\text{ième}}$ chiffre de X, est égal à a_{2n-1}, $n^{\text{ième}}$ chiffre de rang impaire dans T, ou à son complementaire, selon que la somme $a_2 + \cdots + a_{2n-2}$ des chiffres de rang pair, qui le precedent, est paire ou impaire. Analoguement pour Y. On peut aussi écrire ces rélations sous la forme:

$$a_1 = b_1, \; a_2 = \mathbf{k}^{b_1} c_1, \; a_3 = \mathbf{k}^{c_1} b_2, \; a_4 = \mathbf{k}^{b_1 + b_2} c_2, \ldots,$$

$$a_{2n-1} = \mathbf{k}^{c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1}} b_n, \quad a_{2n} = \mathbf{k}^{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} c_n.$$

Si l'on donne la suite T, alors X et Y résultent déterminées, et si l'on donne X et Y, la T est déterminée.

Appelons *valeur* de la suite T la quantité (analogue à un nombre décimal ayant même notation)

$$t = \text{val.}\, T = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots.$$

A chaque suite T correspond un nombre t, et l'on a $0 \leq t \leq 1$. Réciproquement les nombres t, dans l'intervalle $(0, 1)$ se divisent en deux classes:

α) Les nombres, différents de 0 et de 1, qui multipliès par une puissance de 3 donnent un entier; il sont représentés par deux suites, l'une

$$T = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n\, 2\, 2\, 2 \ldots$$

où a_n est égal à 0 ou à 1; l'autre

$$T' = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n'\, 0\, 0\, 0 \ldots$$

où $a_n' = a_n + 1$.

β) Les autres nombres; ils sont représentés par une seule suite T.

Or la correspondence établie entre T et (X, Y) est telle que si T et T' sont deux suites de forme différente, mais val. $T =$ val. T', et si X, Y sont les suites correspondantes à T, et X', Y' celles correspondantes à T', on a

$$\text{val.}\, X = \text{val.}\, X', \quad \text{val.}\, Y = \text{val.}\, Y'.$$

En effet considérons la suite

$$T = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{2n-3} a_{2n-2} a_{2n-1} a_{2n}\, 2\, 2\, 2\, 2 \ldots$$

où a_{2n-1} et a_{2n} ne sont pas toutes deux égales à 2. Cette suite peut réprésenter tout nombre de la classe α. Soit

$$X = 0,\ b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n b_{n+1} \ldots$$

on a:

$$b_n = \mathbf{k}^{a_2 + \cdots + a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = \mathbf{k}^{a_2 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n}}\, 2.$$

Soit T' l'autre suite dont la valeur coincide avec val. T,

$$T' = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{2n-3} a_{2n-2} a_{2n-1}' a_{2n}'\, 0\, 0\, 0\, 0 \ldots$$

et

$$X' = 0,\ b_1 \ldots b_{n-1} b_n' b_{n+1}' \ldots.$$

Les premiers $2n - 2$ chiffres de T' coincident avec ceux de T; donc les premiers $n - 1$ chiffres de X' coincident aussi avec ceux de X; les autres sont déterminés par les rélations

$$b_n' = \mathbf{k}^{a_2 + \cdots + a_{2n-2}} a_{2n-1}', \quad b_{n+1}' = b_{n+2}' = \cdots = \mathbf{k}^{a_2 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n}'}\, 0.$$

Nous distinguerons maintenant deux cas, suivant que $a_{2n} < 2$, ou $a_{2n} = 2$.

Si a_{2n} a la valeur 0 ou 1, on a $a'_{2n} = a_{2n} + 1$, $a'_{2n-1} = a_{2n-1}$, $b'_n = b_n$,

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2} + a'_{2n} = a_2 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n} + 1,$$

d'où

$$b'_{n+1} = b'_{n+2} = \cdots = b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = \mathbf{k}^{a_2 + \cdots + a_{2n}}\, 2.$$

Dans ce cas les deux séries X et X' coincident en forme et en valeur.

Si $a_{2n} = 2$, on a $a_{2n-1} = 0$ ou 1, $a'_{2n} = 0$, $a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1$, et en posant

$$s = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2}$$

on a

$$b_n = \mathbf{k}^s a_{2n-1}, \quad b_{n+1} = b^{n+2} = \cdots = \mathbf{k}^s 2,$$
$$b'_n = \mathbf{k}^s a'_{2n-1}, \quad b'_{n+1} = b'_{n+2} = \cdots = \mathbf{k}^s 0.$$

Or, puisque $a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1$, les deux fractions $0, a_{2n-2}\, 222\ldots$ et $0, a'_{2n-1}\, 0\,0\,0 \ldots$ ont la même valeur; en faisant sur les chiffres la même opération $\mathbf{k}^s$ on obtient les deux fractions $0, b_n b_{n+1} b_{n+2} \ldots$ et $0, b'_n b'_{n+1} b'_{n+2} \ldots$, qui ont aussi, comme l'on voit facilement, la même valeur; donc les fractions X et X', bien que de forme différente, ont la même valeur.

Analoguement on prouve que val. $Y =$ val. Y'.

Donc si l'on pose $x =$ val. X, et $y =$ val. Y, on déduit que x et y sont deux fonctions uniformes de la variable t dans l'intervalle $(0, 1)$. Elles sont continues; en effet si t tend à t_0, les $2n$ premiers chiffres du développement de t finiront par coincider avec ceux du développement de t_0, si t_0 est un β, ou avec ceux de l'un des deux développements de t_0, si t_0 est un α; et alors les n premiers chiffres de x et y correspondantes à t coincideront avec ceux des x, y correspondantes à t_0.

Enfin à tout couple (x, y) tel que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ correspond au moins un couple de suites (X, Y), qui en expriment la valeur; à (X, Y) correspond une T, et à celle-ci t; donc on peut toujours déterminer t de manière que les deux fonctions x et y prennent des valeurs arbitrairement données dans l'intervalle $(0, 1)$.

On arrive aux mêmes consequences si l'on prend pour base de numération un nombre impaire quelconque, au lieu de 3. On peut prendre aussi pour base un nombre pair, mais alors il faut établir entre T et (X, Y) une correspondence moins simple.

On peut former un arc de courbe continue qui remplit entièrement un cube. Faisons correspondre à la fraction (en base 3)

$$T = 0,\ a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

les fractions

$$X = 0,\ b_1 b_2 \ldots,\quad Y = 0,\ c_1 c_2 \ldots,\quad Z = 0,\ d_1 d_2 \ldots$$

où

$$b_1 = a_1,\quad c_1 = \mathbf{k}^{b_1} a_2,\quad d_1 = \mathbf{k}^{b_1+c_1} a_3,\quad b_2 = \mathbf{k}^{c_1+d_1} a_4, \ldots$$

$$b_n = \mathbf{k}^{c_1+\cdots+c_{n-1}+d_1+\cdots+d_{n-1}}\, a_{3n-2},$$

$$c_n = \mathbf{k}^{d_1+\cdots+d_{n-1}+b_1+\cdots+b_n}\, a_{3n-1},$$

$$d_n = \mathbf{k}^{b_1+\cdots+b_n+c_1+\cdots+c_n}\, a_{3n}.$$

On prouve que $x = \text{val.}\, X$, $y = \text{val.}\, Y$, $z = \text{val.}\, Z$ sont des fonctions uniformes et continues de la variable $t = \text{val.}\, T$; et si t varie entre 0 et 1, x, y, z prennent tous les ternes de valeurs qui satisfont aux conditions $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

M. Cantor, (Journal de Crelle, t. 84, p. 242) a démontré qu'on peut établir une correspondence univoque et réciproque (unter gegenseitiger Eindeutigkeit) entre les points d'une ligne et ceux d'une surface. Mais M. Netto (Journal de Crelle, t. 86, p. 263), et d'autres ont démontré qu'un telle correspondence est nécessairement discontinue. (Voir aussi G. Loria, *La definizione dello spazio ad n dimensioni . . . secondo le ricerche di G. Cantor*, Giornale di Matematiche, 1877). Dans ma Note on démontre qu'on peut établir d'un coté l'uniformité et la continuité, c'est-à-dire, aux points d'une ligne on peut faire correspondre les points d'une surface, de façon que l'image de la ligne soit l'entière surface, et que le point sur la surface soit fonction continue du point de la ligne. Mais cette correspondence n'est point univoquement réciproque, car aux points (x, y) du carré, si x et y sont des β, correspond bien une seule valeur de t, mais si x, ou y, on toutes les deux sont des α, les valeurs correspondantes de t sont en nombre de 2 ou de 4.

On a démontré qu'on peut enfermer un arc de courbe plane continue dans une aire arbitrairement petite:

1) Si l'une des fonctions, p. ex. la x coincide avec la variable independente t; on a alors le théorème sur l'integrabilité des fonctions continues.

2) Si les deux fonctions x et y sont à variation limitée (Jordan, Cours d'Analyse, III, p. 599). Mais, comme démontre l'exemple précédent, cela n'est pas vrai si l'on suppose seulement la continuité des fonctions x et y.

Ces x et y, fonctions continues de la variable t, manquent toujours de dérivée.

Turin, Janvier 1890.